WS 07/08

Aufgabe 9

1. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wahr ist.
2. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ falsch ist.

WS 07/08

Aufgabe 9

Berechnen Sie eine Negationsnormalform von $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$. Dabei sind A, B, C und D Atome.

WS 08/09

Aufgabe 9

Beweisen Sie, dass die prädikatenlogische Formel

$$\alpha = \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

weder widerspruchsvoll noch tautologisch ist. Benutzen Sie dafür Interpretationen mit dem Universum $U = \mathbb{Z}$.

SS 09

Aufgabe 8

Die Kommissarin hat drei Tatverdächtige P, Q und R. Die Voruntersuchungen haben ergeben:

1. Wenn Q oder R schuldig sind, dann ist P unschuldig.
2. Ist P unschuldig oder R unschuldig, so ist Q schuldig.
3. Ist R schuldig, dann ist auch P schuldig.

Lässt sich aus den Voruntersuchungen eindeutig ermitteln, wer der/die Täter ist/sind? Falls ja, wer ist schuldig, und wer ist unschuldig?

WS 09/10

Aufgabe 7

Seien A, B, C, D Atome für die folgende Aussagen gelten:

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

Weisen Sie mit einem formalen Beweises nach, dass dann auch C gilt. Erläutern Sie stichwortartig die einzelnen Beweisschritte.

SS 10

Aufgabe 8

Seien A und B Atome. Es werden die Formeln $\alpha = A \to B$, $\beta = \neg A \to \neg B$ und $\gamma = \neg(A \wedge B)$ betrachtet.

1. Formulieren Sie die Konjunktion aus den Formeln; überführen Sie diese in eine konjunktive Normalform (bitte angeben), welche Sie anschließend mittels weiterer Äquivalenzumformungen zu einer Formel in Negationsnormalform mit möglichst wenigen Junktoren vereinfachen. Erläutern Sie die einzelnen Umformungen stichwortartig.
2. Was lässt sich über mögliche Werte für A und B in der vorangegangenen Teilaufgabe aussagen, wenn eine Bewertung $\mathfrak{I}$ den Formeln α, β und γ jeweils den Wert 1 zuordnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

WS 10/11

Aufgabe 9

Seien A, B, C, D Atome. Überführen Sie

$$\neg(A \vee \neg C \to \neg B) \vee (C \wedge B \to D)$$

schrittweise in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen.

Erläutern Sie stichwortartig die jeweils vorgenommenen Äquivalenzumformungen, und benennen Sie Ihre Ergebnisse.

SS 11

Aufgabe 9

Seien P und Q zweistellige Relationen auf einem Universum U und c eine Konstante.Überführen Sie

$$\neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists y Q(y,c))$$

schrittweise in eine Negations- und diese dann in eine pränexe Normalform.

Erläutern Sie stichwortartig die jeweils vorgenommenen Äquivalenzumformungen.

WS 11/12

Aufgabe 9

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \rightarrow (C \vee D) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 12

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass die Formeln $(A \vee B) \rightarrow A$ und $B \rightarrow (A \wedge B)$ äquivalent sind, indem Sie

1. eine Wahrheitstafel für beide Formeln aufstellen.
2. durch Äquivalenzumformungen zeigen, dass die Formeln äquivalent sind. Geben Sie dabei die vorgenommenen Äquivalenzumformungen mit an.

WS 12/13

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \rightarrow (C \vee \neg B) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 13

Aufgabe 8

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln ist erfüllbar, tautologisch oder widerspruchsvoll?

(a) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

(b) $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$.

WS 13/14

Aufgabe 8

Die Formel α sei durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	C	α
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Bestimmen Sie eine disjunktive und eine konjunktive Normalform von α; geben Sie vorgenommene Äquivalenzumformungen jeweils an. Zusatzfrage (die die Arbeit auch vereinfachen kann!): Finden Sie eine DNF mit nur zwei Monomen?

SS 14

Aufgabe 8

Verwenden Sie in dieser Aufgabe die folgenden Prädikatssymbole:

- $P(x)$ bedeutet: x ist ein Problem.
- $L(x, y)$ bedeutet: die Lösung von x ist y.
- $M(x)$ bedeutet: x ist ein Mensch.
- $V(x, y)$ bedeutet: x versteht y.

1. Drücken Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache in Prädikatenlogik aus:
   (a) Jedes Problem hat eine Lösung, die kein Mensch versteht.
   (b) Wenn jedes Problem eine Lösung hat, dann gibt es keinen Menschen, der jedes Problem versteht.

WS 14/15

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \rightarrow \neg A\ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 15

Aufgabe 7

Bestimmen Sie zu jeder Stelle, an der ein Variablensymbol in den folgenden Formeln steht, ob es dort frei oder gebunden ist. Variablensymbole werden mit x, y bezeichnet.

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $\forall x P(x) \to Q(x, y)$
3. $\forall x (P(x) \to Q(x, y))$
4. $Q(x, y) \to \exists y P(x)$

WS 15/16

Aufgabe 8

a) Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

b) Zeigen Sie per Wahrheitstafel, dass für zwei Formeln β, γ stets $\beta \wedge (\beta \vee \gamma) \approx \beta$ gilt.

c) Finden Sie damit eine Normalform von α aus a), die gleichzeitig DNF und KNF ist?

[*6 + 3 + 3 = 12 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine Negationsnormalform der beiden folgenden Formeln:

(a) $\neg((A \vee B) \wedge (\neg B \vee C))$

(b) $\neg(\forall x \exists y (R(x, y) \wedge (\neg Q(y))))$

WS 16/17

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (D \vee (B \wedge \neg C)) \to A \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 17

Aufgabe 8✓

(a) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel

$$((P \to Q) \wedge (R \vee Q)) \to (P \wedge Q)$$

auf. Ist die Formel erfüllbar?

(b) Sind die Formeln

$$(P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R))) \vee (R \wedge Q) \text{ und } (P \vee R) \wedge Q$$

logisch äquivalent?

WS 17/18

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge D \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 18

Aufgabe 8

Gegeben sei die aussagenlogische Formel

$$\alpha = (A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \vee C)).$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten), dass α eine Tautologie ist.

(b) Formen Sie α mit Hilfe von Äquivalenzregeln in eine Negationsnormalform um.

WS 18/19

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow (A \wedge B)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

SS 19

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel $\alpha = ((A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B)$.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten) für α auf. Ist die Formel erfüllbar, tautologisch, widerspruchsvoll?

(b) Finden Sie eine konjunktive oder disjunktive Normalform für α.